Calcolo delle probabilità

- Definizione di Spazio Campionario
- Definizioni di Probabilità
- Eventi mutuamente esclusivi
- Eventi indipendenti
- Principio della somma
- Principio del prodotto

Eventi certi : è certo che si verifichino
es. il prossimo mese sarà luglio,
domani sorgerà il sole

Eventi probabili: non è certo che si verifichino
es. domani pioverà?
Quanti giorni di ricovero avrà quel paziente?
Quel paziente guarirà?

Nel caso di **eventi probabili** utilizziamo il

CALCOLO delle PROBABILITA'

SPAZIO CAMPIONARIO:
insieme di tutti gli eventi possibili

es. lancio di una moneta
spazio campionario: testa, croce

es. esito di una malattia
spazio campionario: guarigione, non guarigione

es. lancio di un dado
spazio campionario: 1, 2, 3, 4, 5, 6

PROBABILITA'

I° definizione – classica:

è il rapporto tra il numero di eventi favorevoli e il numero di eventi possibili

$$probabilità = \frac{n.successi}{n.casi.possibili}$$

- La probabilità è espressa da un numero compreso tra 0 e 1

Probabilità = 0 è impossibile che l'evento si verifichi

Probabilità = 1 è certo che l'evento si verifichi

Probabilità classica

- Esempio: La probabilità di ottenere un numero superiore o uguale a 5 con il tiro di un dado:
- se il dado non è truccato, la probabilità di ogni numero è identica
- due sono gli eventi utili, 6 gli eventi possibili
- P(5,6)=2/6=1/3=0.33

II def -Probabilità frequentista

- In genere, si usa quando gli eventi possibili non hanno la stessa probabilità
- La loro probabilità dipende dalle esperienze passate (frequenza empirica)
- Su 100 compiti d'esame delle sessioni precedenti, 10 sono insufficienti; la probabilità di aver superato l'esame (se il risultato fosse casuale) è di 90/100=.90

III def. - Probabilità soggettiva

- E’ la stima che ciascuno di noi fa, sull’accadere di un evento su cui non abbiamo informazioni sicure
- Normalmente si usa nelle scommesse: “quanto scommetti che…”
- oppure nei giudizi: “mi consigli di fare…”, “devo fare così… o così…”

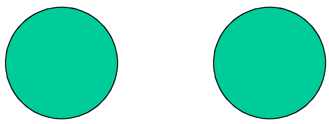
Regole della probabilità

- Una volta trovata la probabilità di un evento (classica, frequentista o soggettiva) le regole che si applicano sono le stesse
- La somma delle probabilità di tutti gli eventi alternativi (e possibili) è (**dev’essere**) pari a 1 (uno solo è l’evento che può accadere); è la distribuzione di probabilità

Eventi mutuamente esclusivi:
quando si verifica l'uno, non si può verificare l'altro

- es. nel lancio di una moneta, se è uscito l'evento Testa, non si può verificare contemporaneamente l'evento Croce

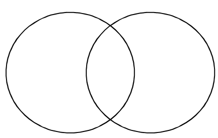
es. per l'esito di una malattia, se il paziente è guarito, non può essere ancora malato



Esempi di eventi
NON mutuamente esclusivi

es. pioggia e vento: il fatto che ci sia pioggia non esclude il fatto che ci sia vento

es. nel gioco delle carte – asso e cuori: il fatto di pescare un asso non esclude che sia di cuori



PRINCIPIO della SOMMA

È corrispondente all'operazione di UNIONE di due insiemi.

Se gli eventi sono mutuamente esclusivi, la probabilità che si verifichi l'evento A oppure l'evento B è data dalla somma della probabilità di A e della probabilità di B

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Esempio del PRINCIPIO della SOMMA per eventi mutuamente esclusivi

es. in Italia la probabilità che un individuo sia del gruppo sanguigno **B** è 0,10 e la probabilità che sia del gruppo **0** è di 0,46.

Qual è la probabilità di incontrare casualmente un soggetto con gruppo sanguigno **B** oppure **0**?

P(B) = 0,10

P(0) = 0,46

P(B+0) = P(B) + P(0) = 0,10 + 0,46 = 0,56

PRINCIPIO della SOMMA per eventi NON mutuamente esclusivi

Se gli eventi NON sono mutuamente esclusivi, la probabilità che si verifichi l'evento A oppure l'evento B è data da:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Esempio del PRINCIPIO della SOMMA per eventi NON mutuamente esclusivi

es. la probabilità che un soggetto sopra i 65 anni abbia valori di colesterolo al di fuori della norma è del 60% e la probabilità che abbia problemi di ritenzione idrica è del 10%. Qual è la probabilità che un soggetto con più di 65 anni abbia valori di colesterolo oppure problemi di ritenzione idrica?

P(colest.) = 0,60
P(rit.idrica) = 0,10

P(colest. + rit.idrica) =
P(colest.) + P(rit.idrica) – P(colest.∩rit.idrica)=
= 0,60 + 0,10 – 0,60x0,10 = 0,64

PRINCIPIO del PRODOTTO
per eventi indipendenti

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Indipendenza: due eventi si dicono indipendenti quando il verificarsi dell'uno non influenza il verificarsi dell'altro

es. elevati livelli di glicemia e ulcera, probabilità di pescare una pallina di un determinato colore da un'urna con reimbussolamento

Esempio del PRINCIPIO del PRODOTTO per eventi indipendenti

es. Supponiamo che, al di sopra dei 65 anni, la probabilità di avere livelli elevati di **glicemia** sia del 40% e quella di presentare un'**ulcera** sia del 3%. Qual è la probabilità di avere contemporaneamente livelli elevati di glicemia e l'ulcera dopo i 65 anni di età?

P(glicemia) = 0,40
P(ulcera) = 0,03

P(glicemia e ulcera) = P(glicemia)P(ulcera) =
= 0,40x0,03 = 0,012 = 1,2%

PRINCIPIO del PRODOTTO
per eventi dipendenti

$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B|A) =$
$= P(B)P(A|B)$

Es. supponiamo che oltre i 65 aa., la probabilità di avere il livello di **colesterolo alto** sia del 60%, quella di avere la **pressione alta** sia del 50% e la probabilità di avere la **pressione alta dato** che si ha il livello di **colesterolo alto** sia del 68%. Qual è la probabilità, oltre i 65 aa., di avere colesterolo alto e pressione alta?

P(colest.) = 0,60

P(pressione) = 0,50

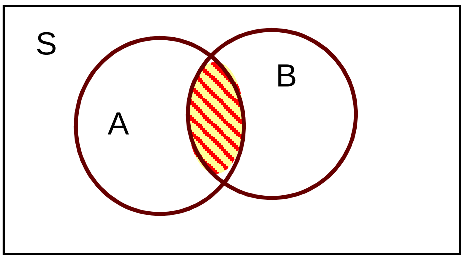
P(pressione|colest.) = 0,68

P(colest. e pressione) = P(colest.)xP(pressione|colest.) = 0,60 x 0,68 = 0.408 = 40,8%

Probabilità condizionata P(A|B)

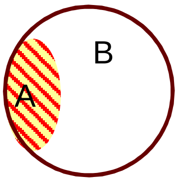
probabilità che si verifichi A dato che si è verificato B

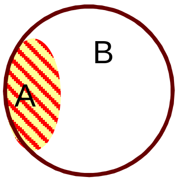
- es. probabilità di avere il livello di colesterolo elevato dato che si ha la glicemia elevata,
- es. probabilità di estrarre da un'urna una pallina di un determinato colore senza reintrodurre la pallina estratta



Probabilità di A dato che è accaduto B P(A|B)

Lo spazio dell'evento B diviene il nuovo spazio campionario





$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esempio

Numero di volte in cui si è usata cocaina	Maschio	Femmina	Totale
(A) 1-19	32	7	39
(B) 20-99	18	20	38
(C) 100	25	9	34
Totale	75	36	111

Qual è la probabilità che un soggetto sia un maschio?

P(M) = numero di maschi / numero totale di soggetti =
= 75/111 = 0.67

PROBABILITÀ MARGINALE

Esempio

Numero di volte in cui si è usata cocaina	Maschio	Femmina	Totale
(A) 1-19	32	7	39
(B) 20-99	18	20	38
(C) >100	25	9	34
Totale	75	36	111

Qual è la probabilità che un maschio abbia usato cocaina più di 100 volte?

$P(C|M) = 25/75 = 0.33$

$P(C/M) = P(C \cap M) / P(M) =$
$= (25/111)/(75/111) = 25/75$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Esempio

Numero di volte in cui si è usata cocaina	Maschio	Femmina	Totale
(A) 1-19	32	7	39
(B) 20-99	18	20	38
(C) >100	25	9	34
Totale	75	36	111

Qual è la probabilità che una persona scelta a caso sia un maschio e abbia usato cocaina più di 100 volte?

$P(C \cap M) = 25/111 = 0.22$

PROBABILITÀ CONGIUNTA

Esempio

Numero di volte in cui si è usata cocaina	Maschio	Femmina	Totale
(A) 1-19	32	7	39
(B) 20-99	18	20	38
(C) >100	25	9	34
Totale	75	36	111

Qual è la probabilità che una persona scelta a caso sia un maschio o abbia usato cocaina più di 100 volte?

$P(C \text{ o } M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M)$
$34/111 + 75/111 - 25/111 = 0.75$

REGOLA DELLA SOMMA

Esercizio

In una sezione di un istituto superiore, formata da 63 ragazze e 37 ragazzi, si è osservato che portavano gli occhiali 23 femmine e 15 maschi.
Se si sceglie a caso uno studente di questa sezione, calcolare:

- la probabilità che uno studente porti gli occhiali
- la probabilità che uno studente, maschio, porti gli occhiali
- la probabilità che contemporaneamente uno studente porti gli occhiali e sia maschio

---

- 63 femmine
- 37 maschi
- 23 femmine portano occhiali
- 15 maschi portano occhiali

Occhiali	Femmine	Maschi	Tot
SI	23	15	38
NO	40	22	62
Totale	63	37	100

la probabilità che uno studente porti gli occhiali

$$P(O) = 38/100 = 0.38$$

la probabilità che uno studente, maschio, porti gli occhiali

$$P(O|M) = 15/37 = 0.405$$

Occhiali	**Femmine**	**Maschi**	**Tot**
SI	23	15	38
NO	40	22	62
Totale	63	37	100

la probabilità che contemporaneamente uno studente porti gli occhiali e sia maschio

$$P(M \cap O) = 15/100 = 0.15$$

la probabilità che uno studente sia maschio o porti gli occhiali

$$P(O \text{ o } M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) =$$
$$38/100 + 37/100 - 15/100 = 60/100 = 0.6$$