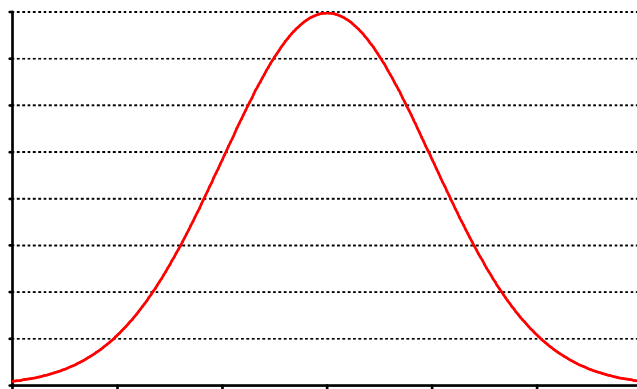
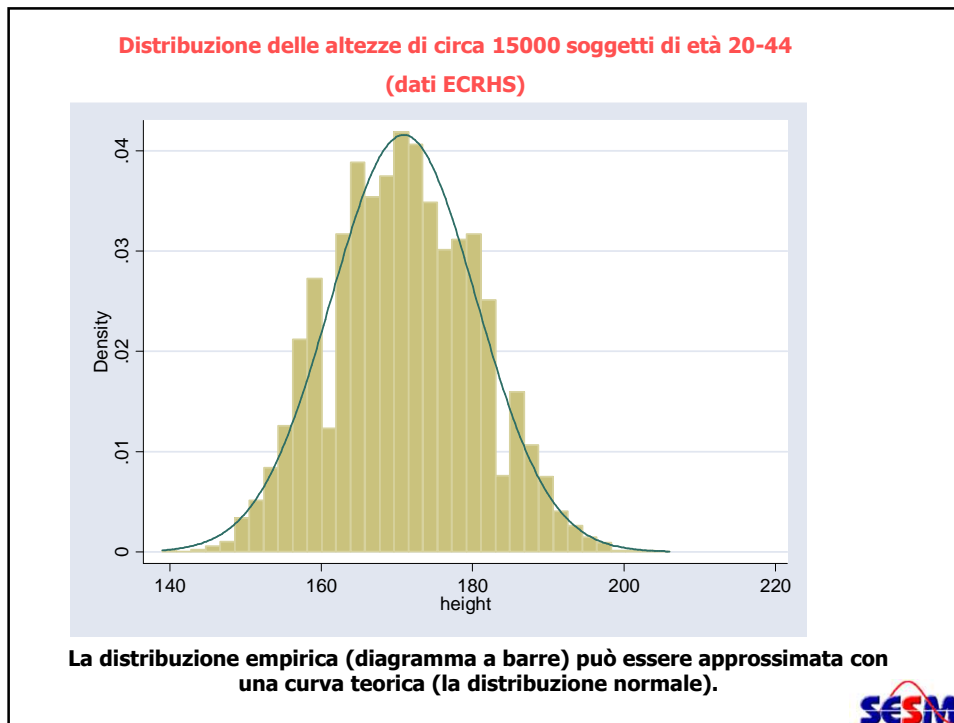


La distribuzione normale


DISTRIBUZIONE NORMALE

La distribuzione normale (distribuzione gaussiana, distribuzione degli errori accidentali) occupa un ruolo centrale nell'ambito della statistica medica.





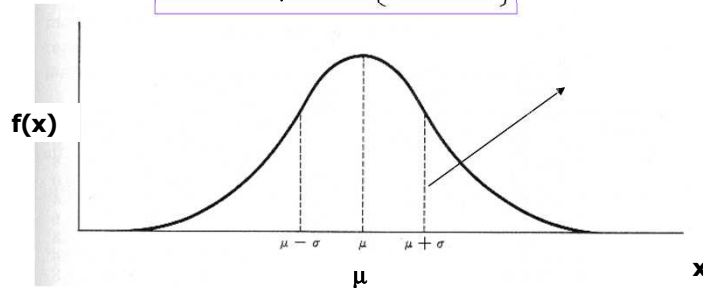
- ◆ La variabile $Y=X_1+X_2+\dots+X_n$ segue una distribuzione normale per n sufficientemente grande e X indipendenti **[teorema del limite centrale]**
- ◆ La maggior parte delle variabili biologiche (peso, statura, ...) dipendono dalla somma di svariati fattori genetici e ambientali. → La maggior parte delle variabili biologiche segue la distribuzione normale.
- ◆ Trasformazioni matematiche (\log , $\sqrt{\dots}$) possono "normalizzare" una variabile che naturalmente non lo sarebbe



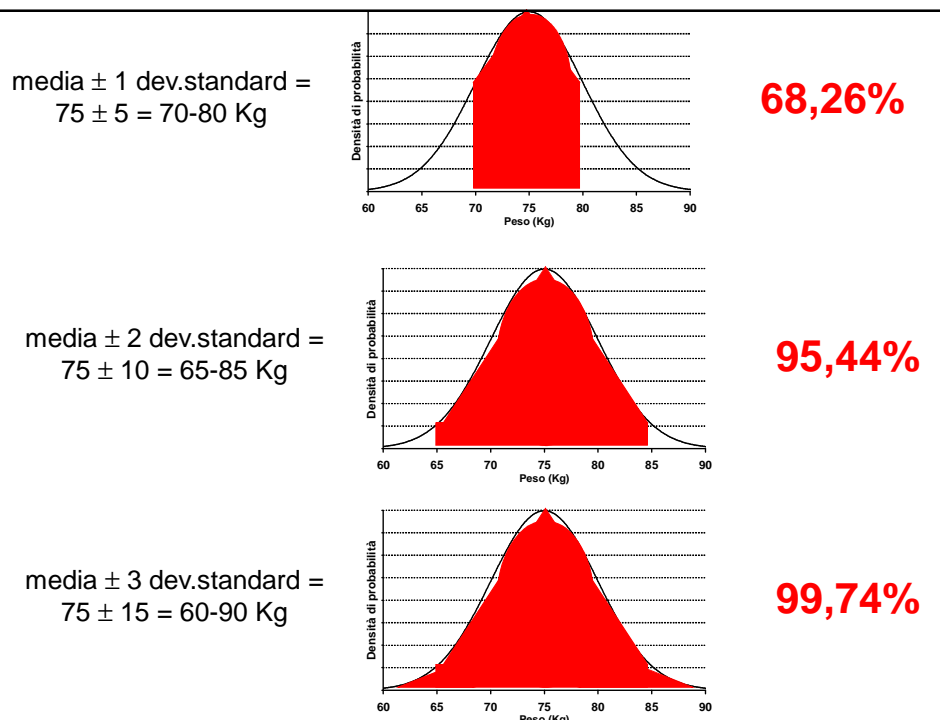
Definizione: Una variabile casuale X ha una distribuzione normale, $X \sim N(\mu, \sigma)$

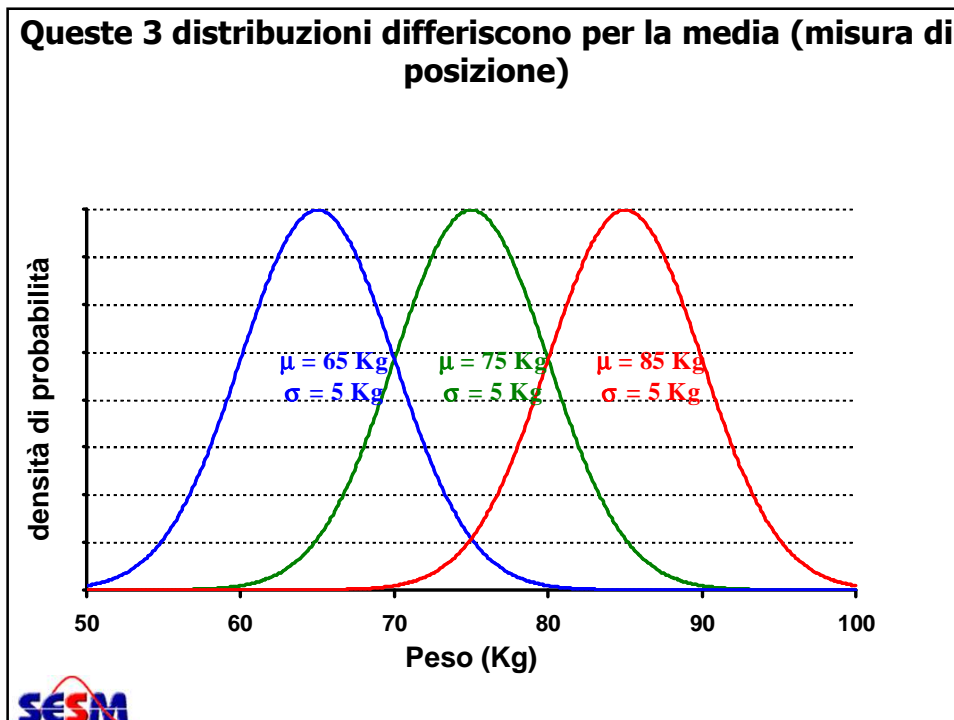
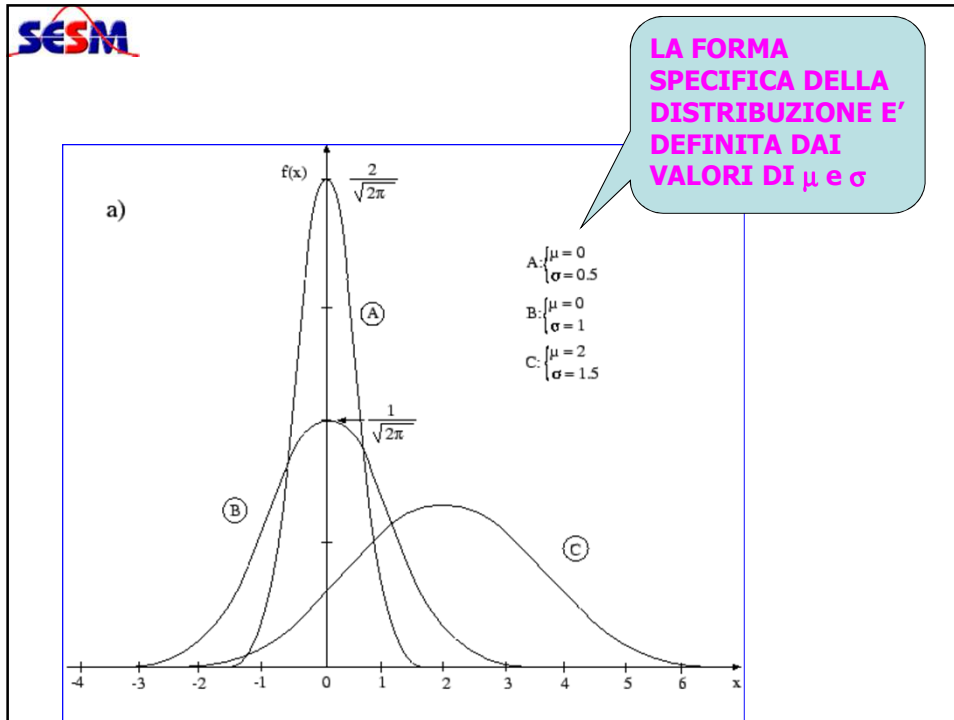
se la sua p.d.f è data da:

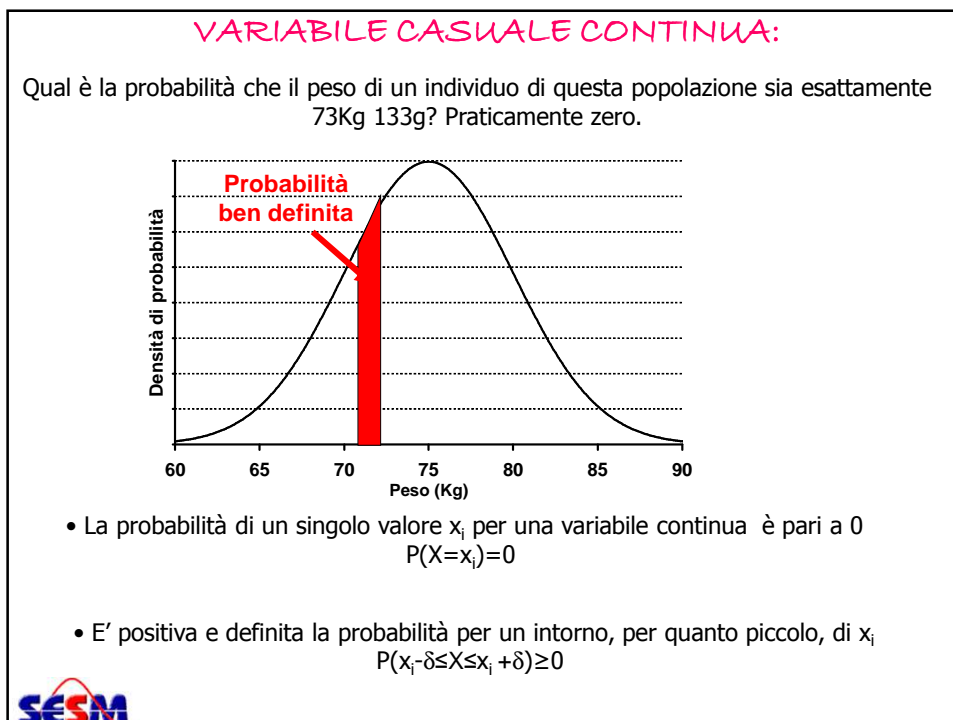
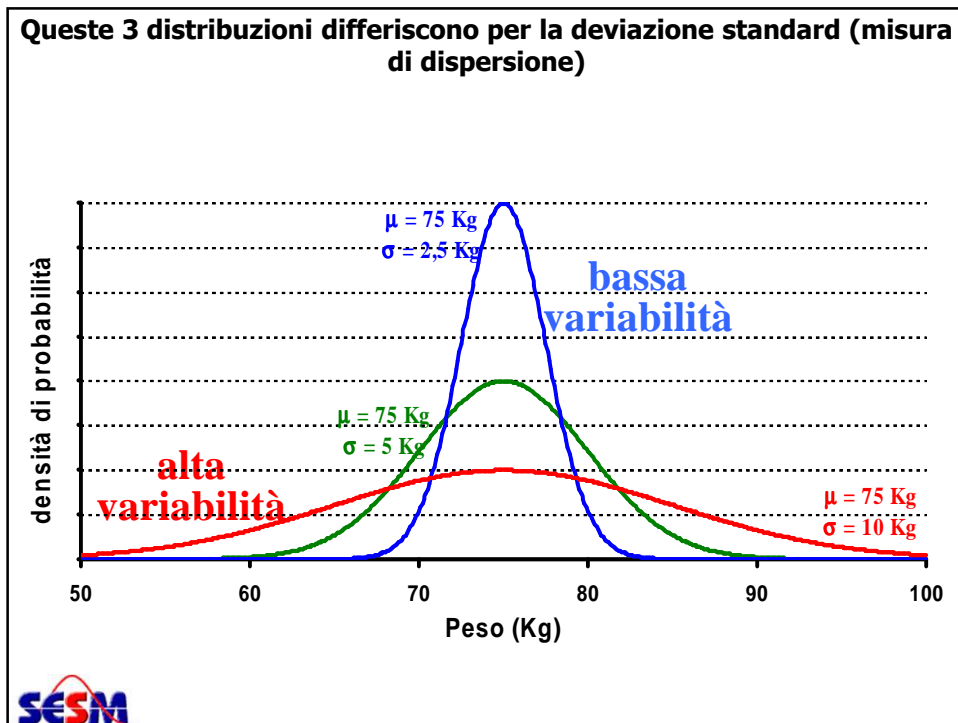
$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



- Forma a campana
- Distribuzione simmetrica
- media=moda=mediana
- $f(x)$ tende a 0 per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$
- l'area al di sotto della curva è pari a 1







Esiste un numero infinito di distribuzioni normali diverse fra loro.



E' possibile ricondurre tutte queste diverse distribuzioni ad un'unica **distribuzione standard?**

Sì, attraverso la **trasformazione normale:**

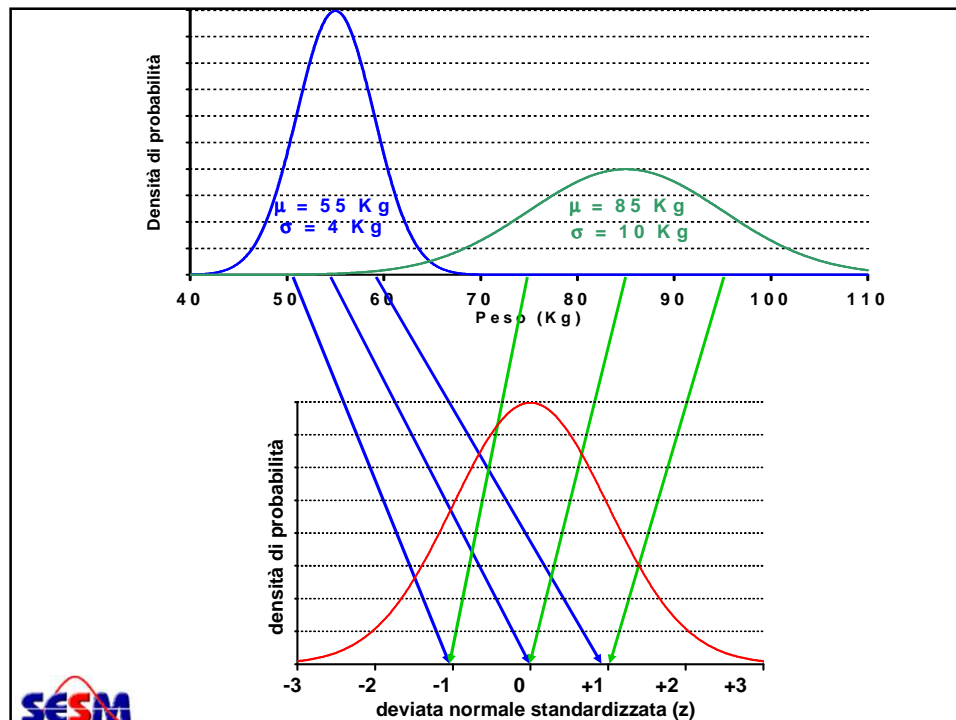


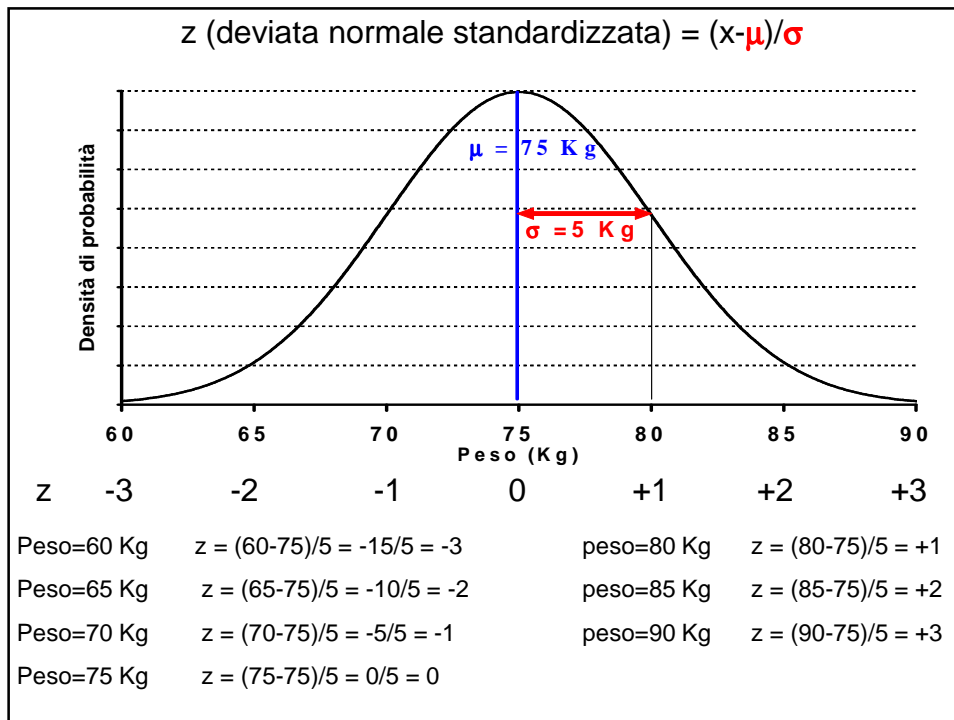
Definizione: Sia X una variabile casuale distribuita normalmente, $X \sim N(\mu, \sigma)$, allora la nuova variabile Z :

$$z = (x - \mu) / \sigma$$

avrà una distribuzione normale con $\mu=0$ e $\sigma=1$. [$Z \sim N(0, 1)$]

Z è detta DEVIATA NORMALE STANDARDIZZATA





Esistono delle tavole (*tavole della z*) che danno la probabilità che Z sia maggiore di un valore qualsiasi. **$P(Z \geq z)$** (*Test a una coda*)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,06430	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233

SES Qual è la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 1,87?

P(Z ≥ z) 0,0307 = 3,07%

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233

SES Qual è la probabilità che Z sia maggiore o uguale a 0,75?

P(Z ≥ z) 0,2266 = 22,66%

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233



Sia X ="peso in kg" e $X \sim N(75, 8)$:

A. Utilizzando le tavole di Z , calcolare la probabilità che:

1. il peso sia ≤ 63 kg
2. il peso sia compreso tra 69 e 92



B. Qual è il valore del peso tale per cui l'80% ha valori inferiori?

Soluzione:

- A. 1. Calcoliamo il valore di Z relativo 63: $z = (63-75)/8 = -1.5$
 $P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) = 0.0668 = 6.7\%$

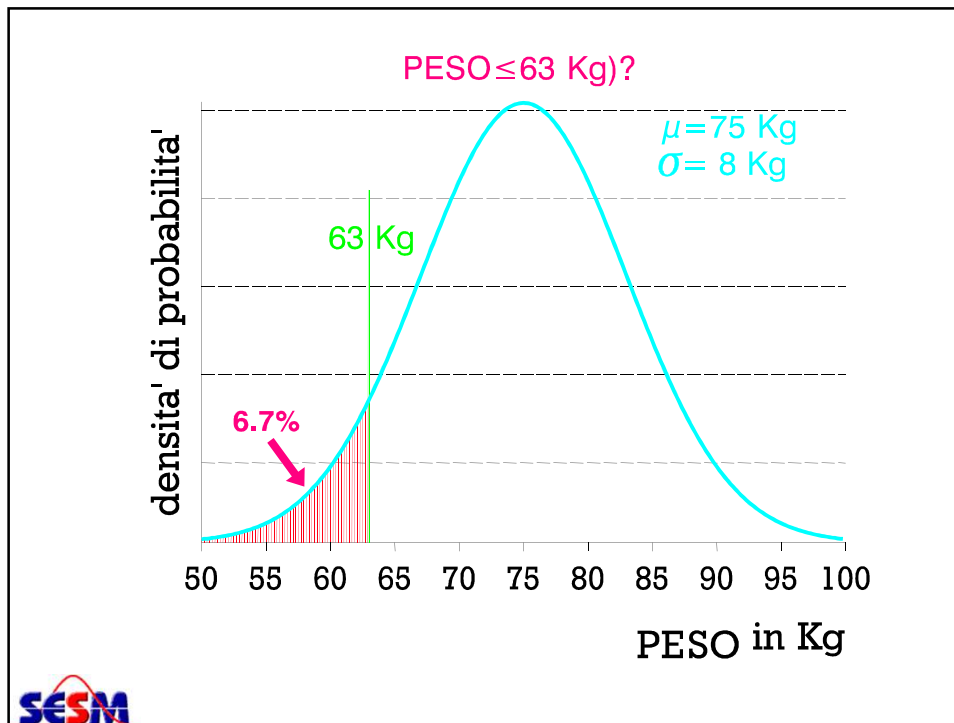
Perché la distribuzione è simmetrica

2. Calcoliamo il valore di Z relativo 69: $z = (69-75)/8 = -0.75$
 e quello relativo a 92: $z = (92-75)/8 = 2.125$

$$\begin{aligned} P(-0.75 \leq Z \leq 2.125) &= 1 - [P(Z \leq -0.75) + P(Z > 2.125)] = \\ &= 1 - [P(Z > 0.75) + P(Z > 2.125)] = \\ &= 1 - (0.2266 + 0.0170) = 0.76118 = 76.1\% \end{aligned}$$

- B. Calcoliamo il valore di X tale per cui $P(Z < z) = 0.80 \rightarrow P(Z \geq z) = 0.20$
 perciò: $z = 0.84$

Quindi il valore di X sarà pari a : $X = 0.84 \cdot 8 + 75 = 81.72$ kg



Si assuma che tra i non diabetici, il livello ematico di glucosio a digiuno sia distribuito in maniera approssimativamente normale con **media=105 mg/100ml** ed una **deviazione standard= 9 mg/100ml**.

Calcolare:

1. Quale % di non diabetici ha livelli compresi tra 90 e 125 mg/ml
2. Qual è il valore di glicemia tale per cui il 90% dei soggetti ha valori superiori
3. Quali livelli di glicemia comprendono il 95% dei non diabetici

Soluzione:

$X =$ livello ematico di glucosio

1. Calcoliamo il valore di Z relativo 90: $z = (90-105)/9 = -1.67$
e quello relativo a 125: $z = (125-105)/9 = 2.22$

$$P(-1.67 \leq Z \leq 2.22) = 1 - [P(Z \leq -1.67) + P(Z > 2.22)] = 1 - [P(Z > 1.67) + P(Z > 2.22)] = 1 - (0.049 + 0.013) = 0.938 = 93.8\%$$



2. Cerco il valore di Z tale per cui:

$$P(Z \leq c) = 0.1 \longrightarrow c = -1.28 \longrightarrow -1.28 = (x - 105) / 9 \longrightarrow X = 93.48 \text{ mg/ml}$$

3. Livelli di glicemia che comprendono il 95% dei non diabetici

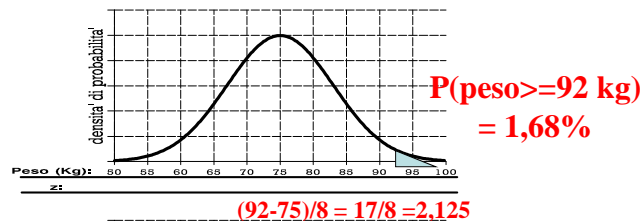
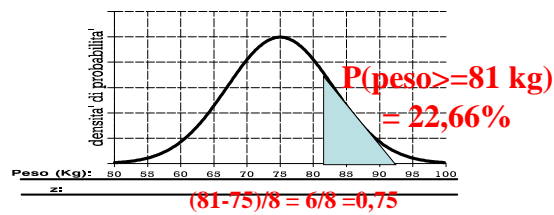
$$\Pr(\mu - 1.96 \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \sigma) = 0.95$$

Quindi l'intervallo ricercato sarà:

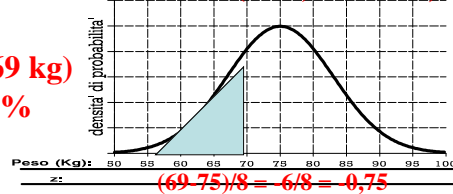
$$\mu \pm 1.96 \sigma = 105 \pm 1.96 \cdot 9 \longrightarrow (87.36 - 122.64)$$



**DISTRIBUZIONE NORMALE: media = 75 kg,
deviazione standard = 8 kg**



**P(peso \leq 69 kg)
= 22,66%**



Come confrontare valori tra di loro o provenienti da popolazioni diverse

z-score o punteggio standardizzato

Traduce l'osservazione della variabile in un valore standardizzato

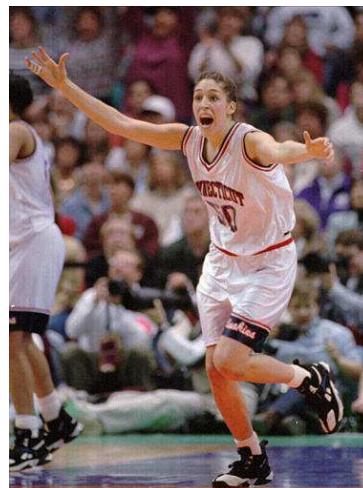
Definizione: è il numero di deviazioni standard di cui una data osservazione è sopra o sotto la media

$$z = \frac{x - \text{media}}{ds}$$

Michael Jordan e Rebecca Lobo



198.12 cm



193.04 cm

L'altezza di MJ tra gli uomini è più eccezionale dell'altezza di RL tra le donne?

Calcoliamo gli z-score

American National Health Survey

Uomini media=175.26, ds = 7.12

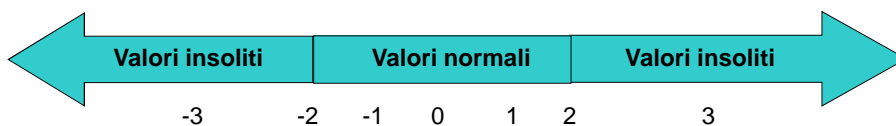
Donne media = 161.54, ds=6.35

Jordan $z=(198.12-175.26)/7.12 = 3.21$

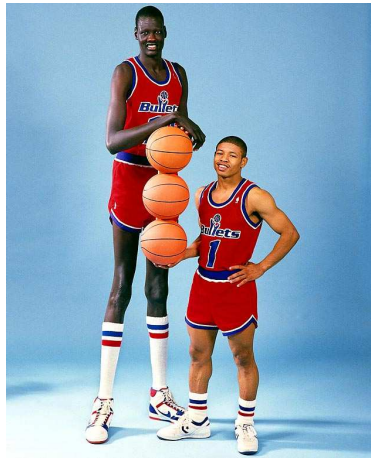
Lobo $z = (193.04-161.54)/6.35 = 4.96$

Interpretazione: l'altezza di MJ è al di sopra della media di 3.21 ds, ma l'altezza di RL è circa 5 volte al di sopra della media. L'altezza della giocatrice è più elevata rispetto a quella di Jordan tra gli uomini

- Consideriamo "insoliti" o "eccezionali" osservazioni che distano dalla media più di 2 ds
- I valori insoliti sono quelli con $z < -2$ o $> +2$



Sia Rebecca Lobo sia Michael Jordan sono eccezionalmente alti



*Muggsy Bogues,
il giocatore più basso degli NBA*

altezza 160.02 cm

American National Health Survey
Uomini media=175.26, ds = 7.12

$$z = (160.02 - 175.26) / 7.12 = -2.14$$

Interpretazione: l'altezza di MB è
al di sotto della media di 2.14
ds.

È un'altezza insolitamente bassa

Valori normali $-2 \leq z \leq 2$

Valori insoliti $z < -2$ oppure $z > 2$