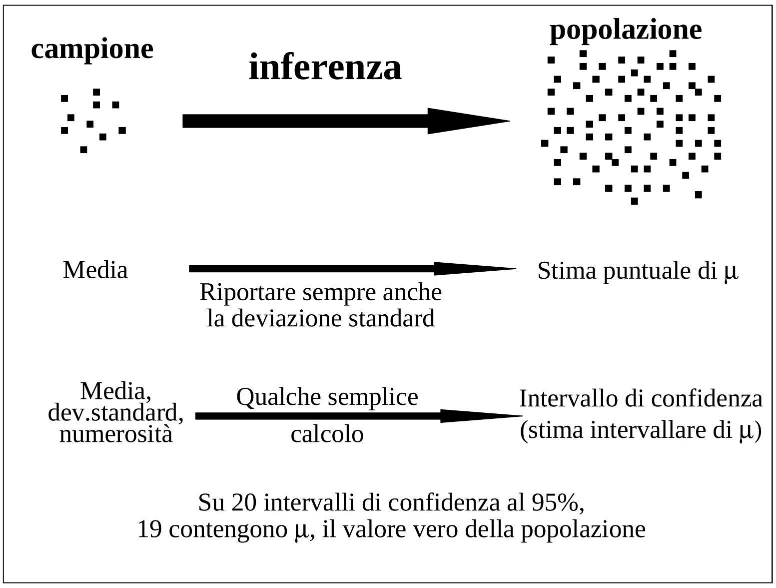
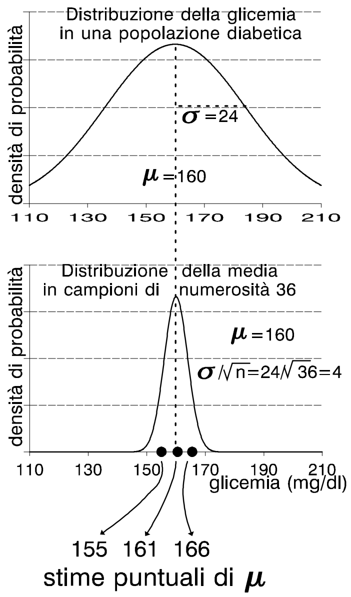
Intervallo di confidenza

Prof. Giuseppe Verlato, Prof. Roberto de Marco
Sezione di Epidemiologia e Statistica Medica,
Università di Verona





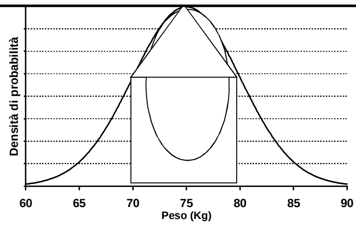
Dal momento che il campione viene estratto casualmente dalla popolazione, le conclusioni tratte da un campione possono essere errate.

L'inferenza statistica viene fatta "con umiltà":

1) si cerca di stimare la probabilità di commettere errori

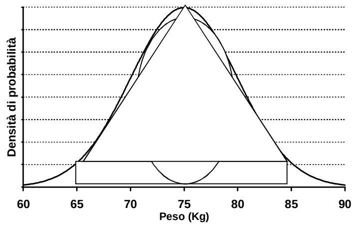
2) si cerca di limitare la probabilità di commettere errori

media ± 1 dev.standard =
75 ± 5 = 70-80 Kg



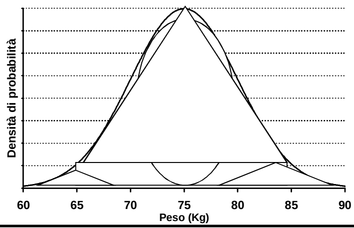
68,26%

media ± 2 dev.standard =
75 ± 10 = 65-85 Kg

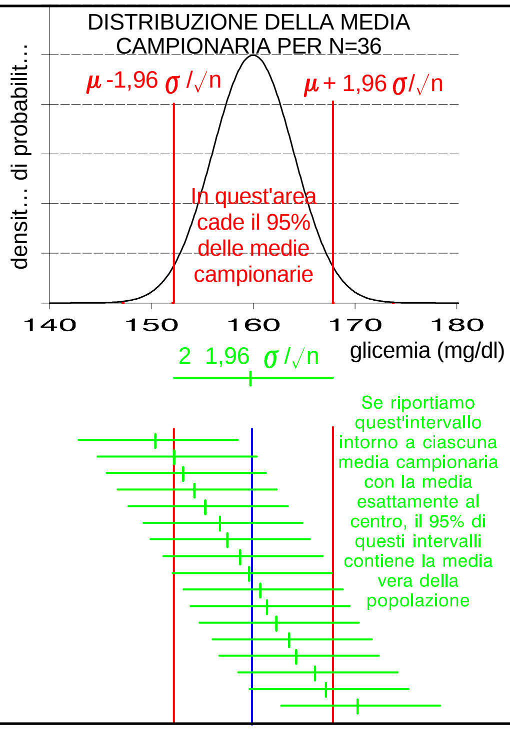


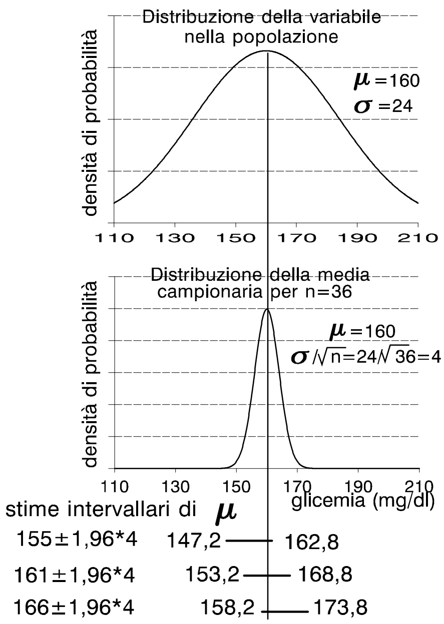
95,44%

media ± 3 dev.standard =
75 ± 15 = 60-90 Kg



99,74%





La **stima puntuale** fornisce un singolo valore. Tuttavia:

1) questo valore non coincide quasi mai con il valore vero (parametro) della popolazione;

2) campioni diversi forniscono stime puntuali diverse.

La **stima intervallare** fornisce un intervallo, che ha una predeterminata probabilità di contenere il valore vero della popolazione. Pertanto:

1) quest'intervallo ha una determinata probabilità (in genere, il 95%) di contenere il valore vero (parametro) della popolazione;

2) gli intervalli ottenuti da campioni diversi in genere si sovrappongono.

INTERVALLO di CONFIDENZA: DEFINIZIONE

Per intervallo di confidenza di un parametro Θ della popolazione, intendiamo un intervallo delimitato da due limiti L_{inf} (limite inferiore) ed L_{sup} (limite superiore) che abbia una definita probabilità (1- α) di contenere il vero parametro della popolazione:

$$p(L_{inf} < \Theta < L_{sup}) = 1-\alpha$$

dove:

1- α = grado di confidenza

α = probabilità di errore

L'intervallo di confidenza diminuisce se

1) diminuisce il **livello di confidenza** (1-α)

   (dal 99% al 95% al 90%)

2) aumenta la **numerosità** del campione

   (da n=4 a n=36 a n=100)

3) diminuisce la **variabilità nella popolazione**

   (da σ=4 a σ=36 a σ=100)

Esempio: Calcolo dell'intervallo di confidenza della media di una popolazione

Problema: Qual è l’intervallo di confidenza al 95% della media del peso di una popolazione, se la media di un campione di 16 soggetti è pari a 75 Kg? Nella popolazione il peso è distribuito normalmente con deviazione standard pari a 12 Kg.

Dati: $x = 75$ Kg $\sigma = 12$ Kg $n = 16$ $1-\alpha = 95\%$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Formula da utilizzare: $I.C._{95\%} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S.$

I passo: calcolo l’errore standard
$E.S. = \sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{16} = 12/4 = 3$ Kg

II passo: calcolo l’intervallo di confidenza

$$I.C._{95\%} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S. = 75 \pm 1{,}96 \cdot 3 = \left[\begin{array}{l} 80{,}88 \text{ Kg} \\ 69{,}12 \text{ Kg} \end{array}\right.$$

L’intervallo che va da 69,12 Kg (limite inferiore) a 80,88 Kg (limite superiore) ha 95 probabilità su 100 di contenere la media vera della popolazione.

E se non conosco σ, la deviazione standard della popolazione?

Posso usare s (dev. standard del campione) come stima di σ

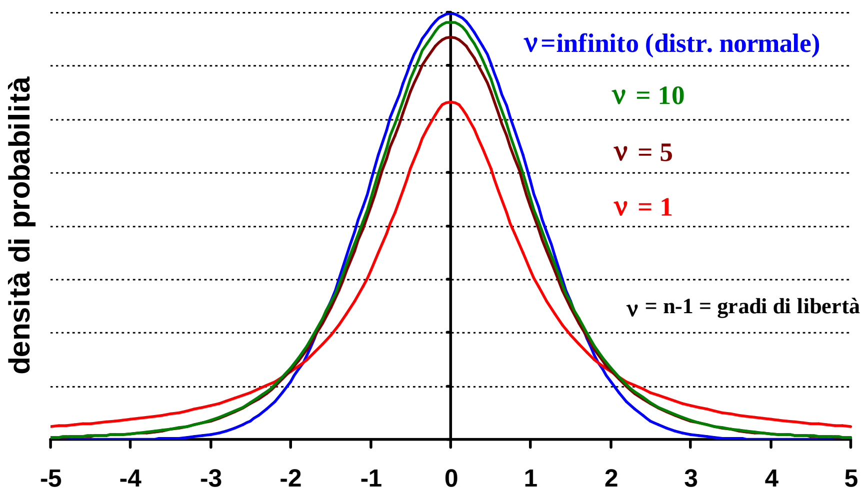
Se la numerosità campionaria è sufficientemente grande ($n \geq 60$), s è una stima precisa di σ.

$$I.C. = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * s / \sqrt{n}$$

Se la numerosità campionaria è piccola ($n < 60$), stimare σ tramite s introduce un’ulteriore fonte di variabilità campionaria

Al posto della distribuzione z, devo utilizzare un’altra distribuzione di probabilità, la distribuzione t, caratterizzata da una maggiore dispersione.

Distribuzione T di Student



$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

Riassumendo:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

σ nota $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * \sigma / \sqrt{n}$

σ ignota $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm t_{\alpha/2,\nu} * s / \sqrt{n}$

Prima della diffusione dei computer si cercava di utilizzare l'approssimazione normale ogni qualvolta possibile. Adesso non è più necessario, per cui la formula seguente è caduta in disuso:

σ ignota $n \geq 60$ $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * s / \sqrt{n}$

Esempio: Calcolo dell'intervallo di confidenza della media di una popolazione

Problema: Qual è l'intervallo di confidenza al 95% della media del peso di una popolazione, se la media di un campione di 16 soggetti è pari a 75 Kg e la deviazione standard è pari a 12 Kg?

Dati: $x = 75$ Kg $s = 12$ Kg $n = 16$ $1-\alpha = 95\%$ $t_{15,\ \alpha/2} = 2{,}131$

Formula da utilizzare: $I.C._{95\%} = x \pm t_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = x \pm t_{\alpha/2} \cdot E.S.$

I passo: calcolo l'errore standard
$E.S. = s/\sqrt{n} = 12/\sqrt{16} = 12/4 = 3$ Kg

II passo: calcolo l'intervallo di confidenza

$$I.C._{95\%} = x \pm t_{15,\ \alpha/2} \cdot E.S. = 75 \pm 2{,}131 \cdot 3 = \left[\begin{array}{l} 81{,}39 \text{ Kg} \\ 68{,}61 \text{ Kg} \end{array}\right.$$

L'intervallo che va da 68,61 Kg (limite inferiore) a 81,39 Kg (limite superiore) ha 95 probabilità su 100 di contenere la media vera della popolazione.