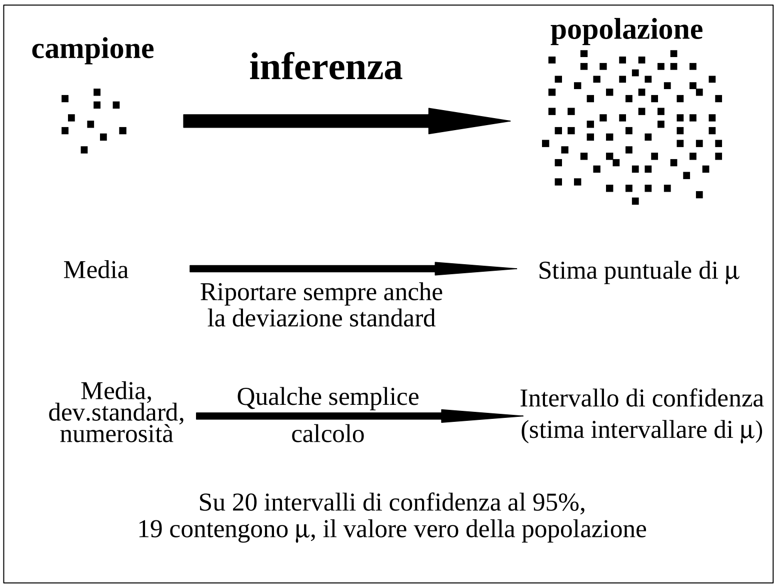
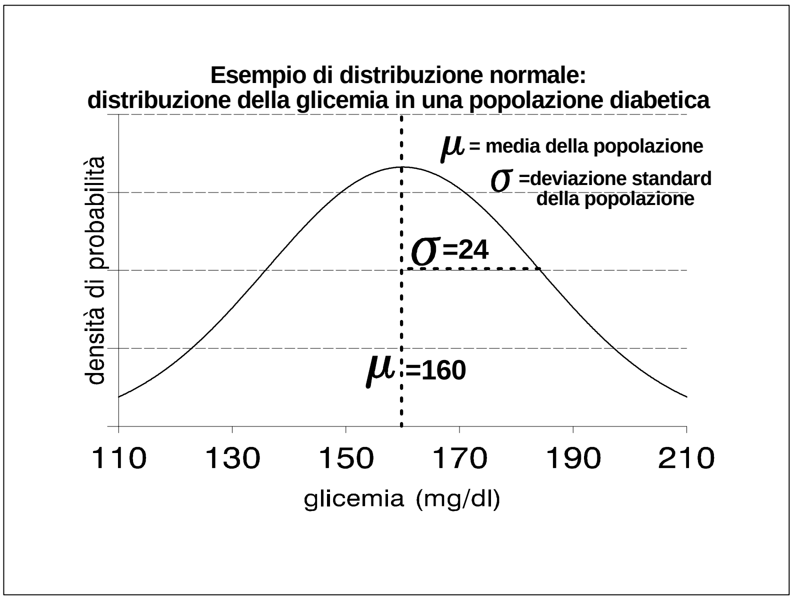
Intervallo di confidenza

Prof. Giuseppe Verlato, Prof. Roberto de Marco
Sezione di Epidemiologia e Statistica Medica,
Università di Verona



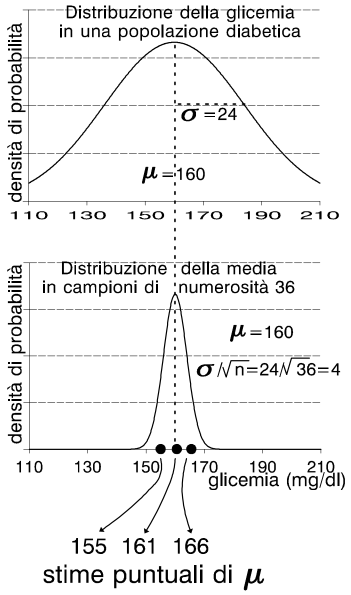


Dal momento che il campione viene estratto casualmente dalla popolazione, le conclusioni tratte da un campione possono essere errate.

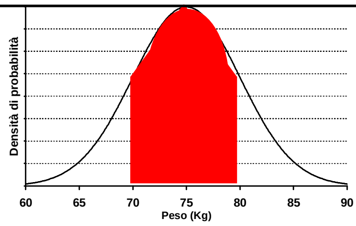
L'inferenza statistica viene fatta "con umiltà":

1) si cerca di stimare la probabilità di commettere errori

2) si cerca di limitare la probabilità di commettere errori

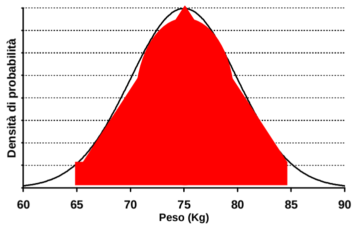


media ± 1 dev.standard =
75 ± 5 = 70-80 Kg



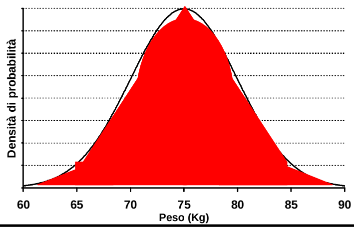
68,26%

media ± 2 dev.standard =
75 ± 10 = 65-85 Kg

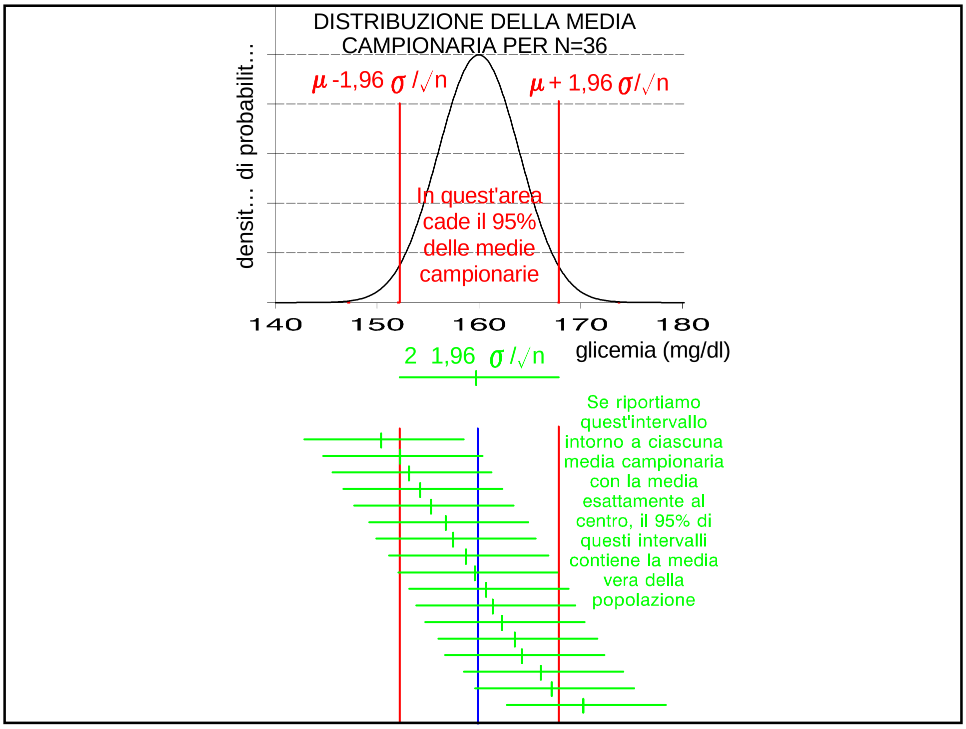


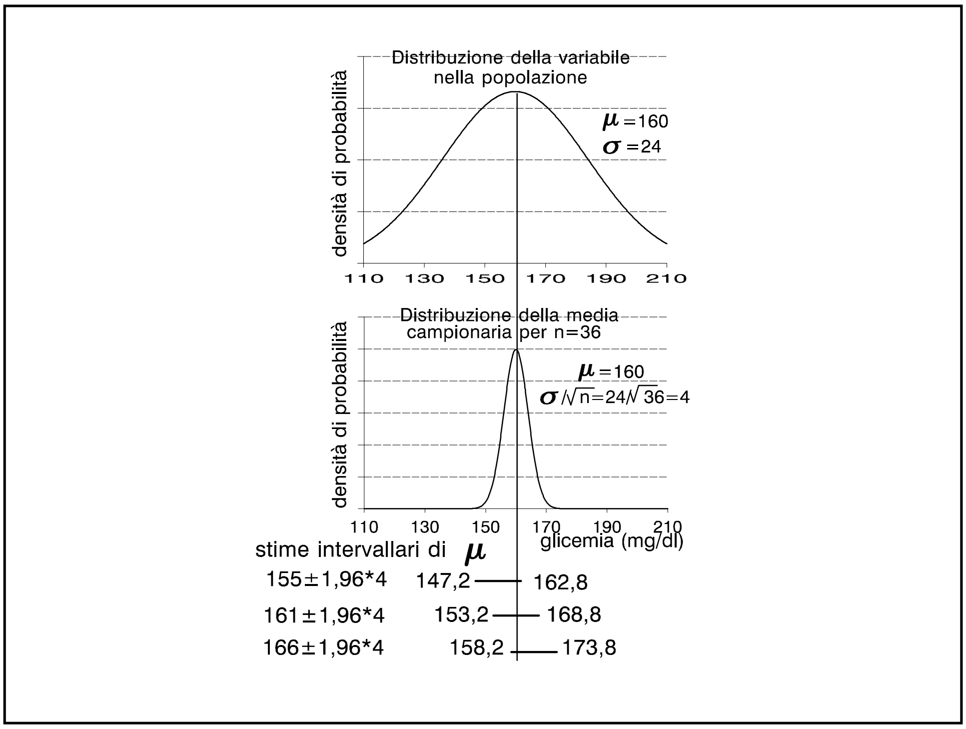
95,44%

media ± 3 dev.standard =
75 ± 15 = 60-90 Kg



99,74%


DISTRIBUZIONE DELLA MEDIA
CAMPIONARIA PER N=36
densit... di probabilit...
μ -1,96 σ /√n
μ + 1,96 σ/√n
In quest'area
cade il 95%
delle medie
campionarie
140
150
160
170
180
glicemia (mg/dl)
2 1,96 σ /√n
Se riportiamo
quest'intervallo
intorno a ciascuna
media campionaria
con la media
esattamente al
centro, il 95% di
questi intervalli
contiene la media
vera della
popolazione


Distribuzione della variabile
nella popolazione
densità di probabilità
μ =160
σ =24
110
130
150
170
190
210
Distribuzione della media
campionaria per n=36
densità di probabilità
μ =160
σ /√n=24/√36=4
110
130
150
170
190
210
glicemia (mg/dl)
stime intervallari di μ
155±1,96*4
147,2
162,8
161±1,96*4
153,2
168,8
166±1,96*4
158,2
173,8

La **stima puntuale** fornisce un singolo valore. Tuttavia:

1) questo valore non coincide quasi mai con il valore vero (parametro) della popolazione;

2) campioni diversi forniscono stime puntuali diverse.

La **stima intervallare** fornisce un intervallo, che ha una predeterminata probabilità di contenere il valore vero della popolazione. Pertanto:

1) quest'intervallo ha una determinata probabilità (in genere, il 95%) di contenere il valore vero (parametro) della popolazione;

2) gli intervalli ottenuti da campioni diversi in genere si sovrappongono.

INTERVALLO di CONFIDENZA: DEFINIZIONE

Per intervallo di confidenza di un parametro Θ della popolazione, intendiamo un intervallo delimitato da due limiti L_{inf} (limite inferiore) ed L_{sup} (limite superiore) che abbia una definita probabilità (1- α) di contenere il vero parametro della popolazione:

$$p(L_{inf} < \Theta < L_{sup}) = 1-\alpha$$

dove:

$1-\alpha$ = grado di confidenza

α = probabilità di errore

DERIVAZIONE DELL'INTERVALLO DI CONFIDENZA AL 95% PER LA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE (Dev.St. NOTA)

$$Pr\left(\mu - 1.96 * \sigma / \sqrt{n} < \bar{x} < \mu + 1.96 * \sigma / \sqrt{n}\right) = 0{,}95$$

$$\mu - 1.96 * \sigma / \sqrt{n} < \bar{x} < \mu + 1.96 * \sigma / \sqrt{n}$$

$$\Big\Downarrow \; -\mu$$

$$- 1.96 * \sigma / \sqrt{n} < \bar{x} - \mu < 1.96 * \sigma / \sqrt{n}$$

$$\Big\Downarrow \; -\bar{x}$$

$$-\bar{x} - 1.96 * \sigma / \sqrt{n} < -\mu < -\bar{x} + 1.96 * \sigma / \sqrt{n}$$

$$\Big\Downarrow \; \textbf{Moltiplico per -1}$$

$$\bar{x} + 1.96 * \sigma / \sqrt{n} > \mu > \bar{x} - 1.96 * \sigma / \sqrt{n}$$

$$\bar{x} - 1.96 * \sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{x} + 1.96 * \sigma / \sqrt{n}$$

L'intervallo di confidenza diminuisce se

1) diminuisce il **livello di confidenza** (1-α)

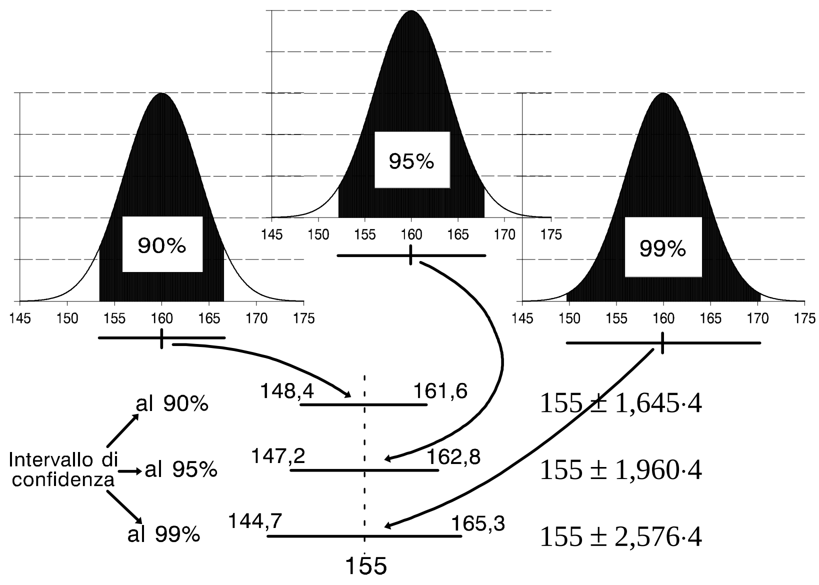
   (dal 99% al 95% al 90%)

2) aumenta la **numerosità** del campione

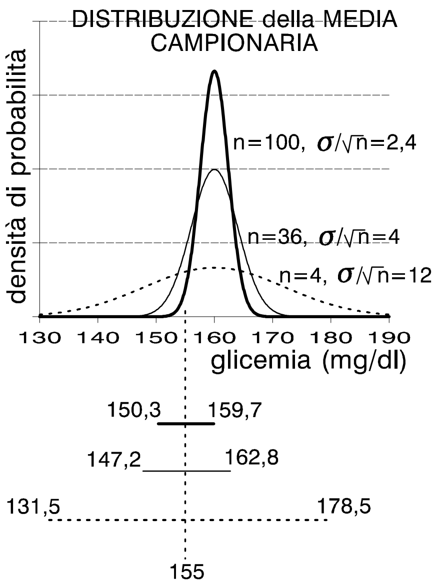
   (da n=4 a n=36 a n=100)

3) diminuisce la **variabilità nella popolazione**

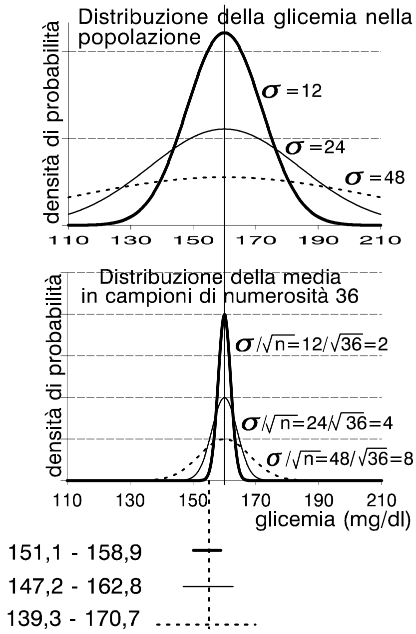
   (da σ=4 a σ=36 a σ=100)



95%
90%
99%
145 150 155 160 165 170 175
148,4
161,6
al 90%
147,2
162,8
Intervallo di confidenza
al 95%
144,7
165,3
al 99%
155
155 ± 1,645·4
155 ± 1,960·4
155 ± 2,576·4



DISTRIBUZIONE della MEDIA CAMPIONARIA
densità di probabilità
n=100, σ/√n=2,4
n=36, σ/√n=4
n=4, σ/√n=12
130 140 150 160 170 180 190
glicemia (mg/dl)
150,3
159,7
147,2
162,8
131,5
178,5
155



Esempio: Calcolo dell'intervallo di confidenza della media di una popolazione

Problema: Qual è l'intervallo di confidenza al 95% della media del peso di una popolazione, se la media di un campione di 16 soggetti è pari a 75 Kg? Nella popolazione il peso è distribuito normalmente con deviazione standard pari a 12 Kg.

Dati: $x = 75$ Kg $\sigma = 12$ Kg $n = 16$ $1\text{-}\alpha = 95\%$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Formula da utilizzare: $I.C._{95\%} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S.$

I passo: calcolo l'errore standard
$E.S. = \sigma / \sqrt{n} = 12/\sqrt{16} = 12/4 = 3$ Kg

II passo: calcolo l'intervallo di confidenza

$$I.C._{95\%} = x \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S. = 75 \pm 1{,}96 \cdot 3 = \begin{cases} 80{,}88 \text{ Kg} \\ 69{,}12 \text{ Kg} \end{cases}$$

L'intervallo che va da 69,12 Kg (limite inferiore) a 80,88 Kg (limite superiore) ha 95 probabilità su 100 di contenere la media vera della popolazione.

E se non conosco σ, la deviazione standard della popolazione?

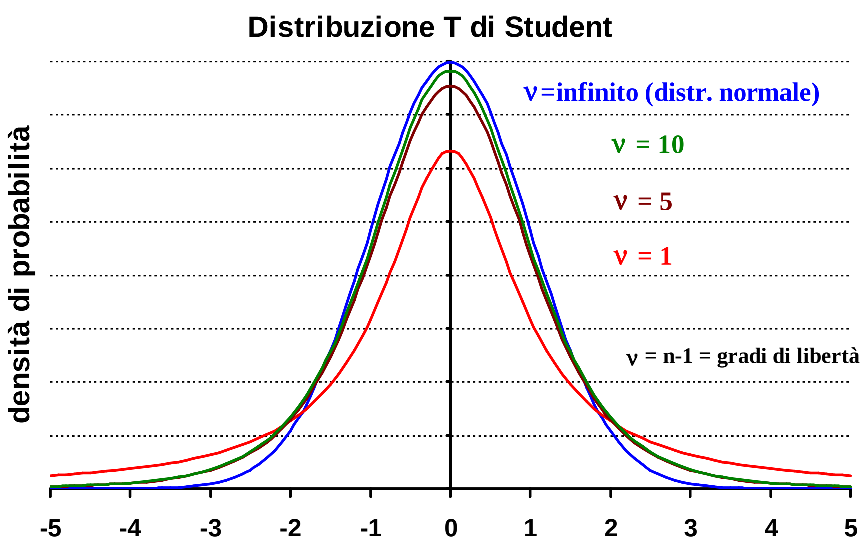
Posso usare s (dev. standard del campione) come stima di σ

Se la numerosità campionaria è sufficientemente grande ($n \geq 60$), s è una stima precisa di σ.

$$I.C. = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} * s / \sqrt{n}$$

Se la numerosità campionaria è piccola ($n<60$), stimare σ tramite s introduce un'ulteriore fonte di variabilità campionaria

Al posto della distribuzione z, devo utilizzare un'altra distribuzione di probabilità, la distribuzione t, caratterizzata da una maggiore dispersione.



$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

Riassumendo:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

σ nota $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * \sigma / \sqrt{n}$

σ ignota $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm t_{\alpha/2,\,\nu} * s / \sqrt{n}$

Prima della diffusione dei computer si cercava di utilizzare l'approssimazione normale ogni qualvolta possibile. Adesso non è più necessario, per cui la formula seguente è caduta in disuso:

σ ignota $n \geq 60$ $\Rightarrow$ $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} * s / \sqrt{n}$

Esempio: Calcolo dell'intervallo di confidenza della media di una popolazione

Problema: Qual è l'intervallo di confidenza al 95% della media del peso di una popolazione, se la media di un campione di 16 soggetti è pari a 75 Kg e la deviazione standard è pari a 12 Kg?

Dati: x = 75 Kg s = 12 Kg n = 16 1-α= 95% $t_{15,\,\alpha/2}$ = 2,131

Formula da utilizzare: $I.C._{95\%} = x \pm t_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = x \pm t_{\alpha/2} \cdot E.S.$

I passo: calcolo l'errore standard
$E.S. = s/\sqrt{n} = 12/\sqrt{16} = 12/4 = 3$ Kg

II passo: calcolo l'intervallo di confidenza

$I.C._{95\%} = x \pm t_{15,\,\alpha/2} \cdot E.S. = 75 \pm 2{,}131 \cdot 3 =$ 81,39 Kg; 68,61 Kg

L'intervallo che va da 68,61 Kg (limite inferiore) a 81,39 Kg (limite superiore) ha 95 probabilità su 100 di contenere la media vera della popolazione.

Intervallo di confidenza

$\theta = \mu$

livello di confidenza = 0,95

$\bar{x} - 1{,}96 * \sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{x} + 1{,}96 * \sigma / \sqrt{n}$

per un generico livello di confidenza = $1-\alpha$

$\bar{x} - Z_{\alpha/2} * \sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} * \sigma / \sqrt{n}$

per un generico parametro θ

$\hat{\theta} - Z_{\alpha/2} * E.S.(\hat{\theta}) < \theta < \hat{\theta} + Z_{\alpha/2} * E.S.(\hat{\theta})$

Problema 3: Calcolo dell'intervallo di confidenza di una proporzione di una popolazione

Problema: Qual è l'intervallo di confidenza al 95% della probabilità (prevalenza) di asma in una popolazione, se la frequenza relativa di asma in un campione di 225 soggetti è pari a 0,05 (5%)?

Dati: $p = 0{,}05$ $n = 225$ $1-\alpha = 95\%$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ I.C. = ?

Formula da utilizzare: $I.C._{95\%} = p \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} = p \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S.$

I passo: calcolo l'errore standard
$E.S. = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{0{,}05(1-0{,}05)/225} = \sqrt{0{,}05*0{,}95/225} = 0{,}01453 = 1{,}45\ \%$

II passo: calcolo l'intervallo di confidenza

$I.C._{95\%} = p \pm z_{\alpha/2} \cdot E.S. =$
- Limite superiore = 5 + 1,96*1,45 = 7,85%
- Limite inferiore = 5 - 1,96*1,45 = 2,15%

L'intervallo che va dal 2,15% (limite inferiore) al 7,85% (limite superiore) ha 95 probabilità su 100 di contenere la prevalenza vera di asma in quella determinata popolazione.

INTERVALLO DI CONFIDENZA DI LIVELLO (1-α)

PER UNA PROPORZIONE

Se $np \geq 10$ e $n(1-p) \geq 10 \Rightarrow \hat{\pi} = p \sim N(\pi, \pi(1-\pi)/n)$

utilizzo $p(1-p)/n$ per stimare $\pi(1-\pi)/n$

$$p - Z_{\alpha/2} * \sqrt{p(1-p)/n} < \pi < p + Z_{\alpha/2} * \sqrt{p(1-p)/n}$$

per $1-\alpha = 95\%$

$$p - 1{,}96 * \sqrt{p(1-p)/n} < \pi < p + 1{,}96 * \sqrt{p(1-p)/n}$$

Intervallo di confidenza per proporzioni

APPROSSIMAZIONE NORMALE: casi>=10 e non-casi>=10

casi	tutti i soggetti	p %	ESp %	limite infer. %	limite sup. %
40	**211**	18,957	2,698	13,669	24,246
48	**300**	16,000	2,117	11,851	20,149

METODO ESATTO, basato sulla distribuzione binomiale

					calcoli statistici			
casi	tutti i soggetti	p %	limite infer. %	limite sup. %	pLOW	2,50%	pHIGH	2,50%
3	**55**	5,455	1,139	15,123	**0,011393**	0,02500	**0,15123**	0,02501
3	**75**	4,000	0,833	11,248	**0,008326**	0,02500	**0,11248**	0,02500

In una distribuzione binomiale con π=0,0083 ed n=75 la probabilità di osservare 3 o più casi è di 0,025

In una distribuzione binomiale con π=0,1125 ed n=75, P(X≤3)=0,025

Intervallo di confidenza per tassi di incidenza

$ES = (\sqrt{casi}) / \text{persone-anno}$

$IC\ 95\% = inc \pm 1{,}96 * ES$

APPROSSIMAZIONE NORMALE: casi>=30

casi	persone anno	incidenza (per 100000 persone-anno)	ES (per 100000 persone-anno)	limite infer. % (per 100000 persone-anno)	limite sup. % (per 100000 persone-anno)
9	**30000**	30,000	10,000	10,400	49,600
50	**30000**	166,667	23,570	120,469	212,864

METODO ESATTO, basato sulla distribuzione di Poisson

casi	persone anno	incidenza (per 100000 persone-anno)	mi0 (per 100000 persone-anno)	mi1 (per 100000 persone-anno)	limite infer. % (per 100000 persone-anno)	limite sup. % (per 100000 persone-anno)
9	**30000**	30,000	4,120	17,080	13,733	56,933
50	**30000**	166,667	37,110	65,920	123,700	219,733

In una distribuzione di Poisson con μ=4,12 la probabilità di osservare 9 o più casi è di 0,025

In una distribuzione di Poisson con μ=17,08, $P(X \leq 9)$=0,025

Problema 4: Utilizzo dell'Intervallo di Confidenza per decidere la numerosità di un campione.

Problema: Si vuole stimare la prevalenza (probabilità) di asma in una popolazione. Dati preliminari provenienti dalla letteratura suggeriscono che la prevalenza di asma si aggiri intorno al 5%. Qual è la numerosità campionaria necessaria per ottenere un intervallo di confidenza al 95% di ampiezza inferiore o uguale al 2%?

Dati: $p = 0{,}05$ $\quad 1-\alpha = 95\%$ $\quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$ $\quad$ ampiezza IC $\leq 2\%$ $\quad n = ?$

$(p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n}) - (p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n}) \leq \delta$

$2\, z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} \leq \delta$ — divido il I e il II membro per $2\, z_{\alpha/2}$

$\sqrt{p(1-p)/n} \leq \delta / (2\, z_{\alpha/2})$ — elevo il I e il II membro al quadrato

$p(1-p)/n \leq \delta^2 / (2\, z_{\alpha/2})^2$ — moltiplico per n e divido per il II membro

$p(1-p)\, (2\, z_{\alpha/2})^2 / \delta^2 \leq n$

$n \geq 0{,}05 * 0{,}95 * (2 * 1{,}96)^2 / 0{,}02^2$ $\qquad n \geq 0{,}0475 * (3{,}92)^2 / 0{,}0004$

$n \geq 0{,}0475 * 15{,}36 / 0{,}0004$ $\qquad$ **$n \geq 1824{,}76$** $\qquad$ **$n \geq 1825$**